الفصل الأول

أولاً : التكامل المحدد

لتكن f دالة متغير حقيقي ذات قيم عقدية أي أن

$$① \quad f(t) = u(t) + i\,v(t) \qquad a \le t \le b$$

$f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ لنفرض ان الدالتين u ، v هما دالتان متصلتين قطعة قطعة على المجال $[a, b]$ نقول عن دالة u انها متصلة قطعة قطعة على المجال $[a, b]$ إذا كان عدد النقاط التي تكون فيها الدالة غير مستمرة منتهي على أن تكون النهايات من اليمين ومن اليسار موجودة أما عند أطراف المجال فالنهاية عند a موجودة من اليمين وعند b النهاية موجودة من اليسار

عندئذ يمكن أن نعرف تكامل الدالة $f(t)$ على المجال $[a, b]$ من خلال العلاقة الآتية

$$\text{القانون الأول} \quad ① \quad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt$$

من هذه العلاقة نستنتج أن :

$$\operatorname{Re} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt$$

$$\operatorname{Im} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

العلاقة في الطرف الأيسر من العلاقة ① موجود

حيث يمكن أن نثبت أن

$$\int_a^b c\,f(t)\,dt = c \int_a^b f(t)\,dt \qquad c = c_1 + i c_2$$

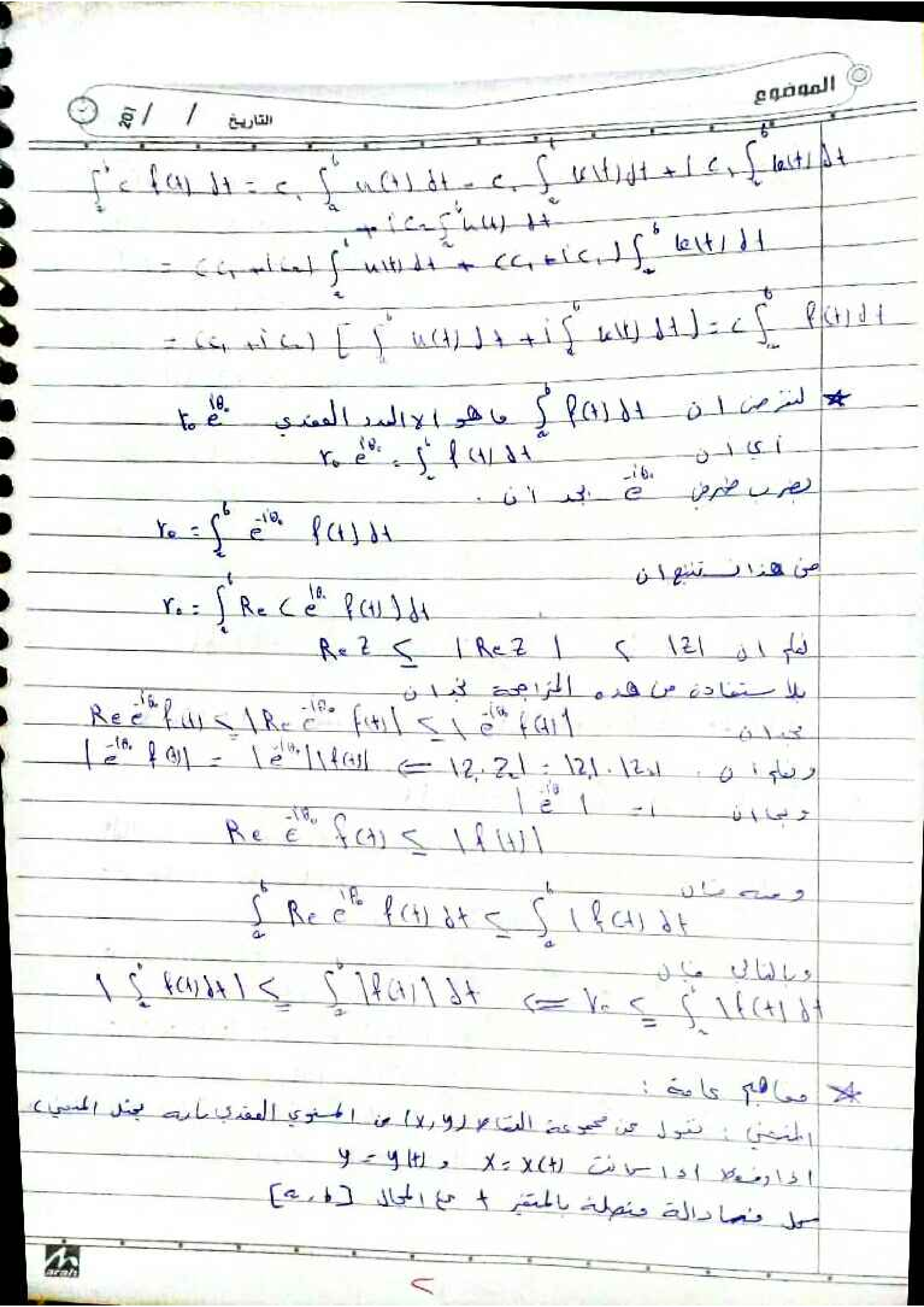
نفرض أن $f(t) = u(t) + i v(t)$ عندئذ ،

$$c\,f(t) = (c_1 + i c_2)(u(t) + i v(t))$$
$$= (c_1 u(t) - c_2 v(t)) + i\,(c_1 v(t) + c_2 u(t))$$

إذاً استناداً الى العلاقة ① فإن

$$\int_a^b c\,f(t)\,dt = \int_a^b (c_1 u(t) - c_2 v(t))\,dt + i \int (c_1 v(t) + c_2 u(t)$$

وبالاستفادة من خواص التكامل في الساحة الحقيقية نجد أن



$\int_a^b c f(t)\,dt = c_1 \int_a^b u(t)\,dt - c_2 \int_a^b v(t)\,dt + i\left(c_1 \int_a^b v(t)\,dt + c_2 \int_a^b u(t)\,dt\right)$

$= (c_1 + i c_2) \int_a^b u(t)\,dt + (-c_2 + i c_1) \int_a^b v(t)\,dt$

$= (c_1 + i c_2)\left[\int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt\right] = c \int_a^b f(t)\,dt$

★ لنفرض ان $\int_a^b f(t)\,dt$ ما هو الا العدد العقدي $r_0 e^{i\theta_0}$

أي ان $r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b f(t)\,dt$

بضرب طرفي $e^{-i\theta_0}$ نجد ان .

$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} f(t)\,dt$

من هذا نستنتج ان

$r_0 = \int_a^b Re\,(e^{-i\theta_0} f(t))\,dt$

نعلم ان $Re\, z \le |Re\, z| \le |z|$

بالاستفادة من هذه المتراجحة نجد ان

$Re\, e^{-i\theta_0} f(t) \le |Re\, e^{-i\theta_0} f(t)| \le |e^{-i\theta_0} f(t)|$

نجد ان

ونعلم ان $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftarrow |e^{-i\theta_0} f(t)| = |e^{-i\theta_0}|\,|f(t)|$

وبما ان $|e^{-i\theta}| = 1$

$Re\, e^{-i\theta_0} f(t) \le |f(t)|$

ومنه فان

$\int_a^b Re\, e^{-i\theta_0} f(t)\,dt \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

وبالتالي فان

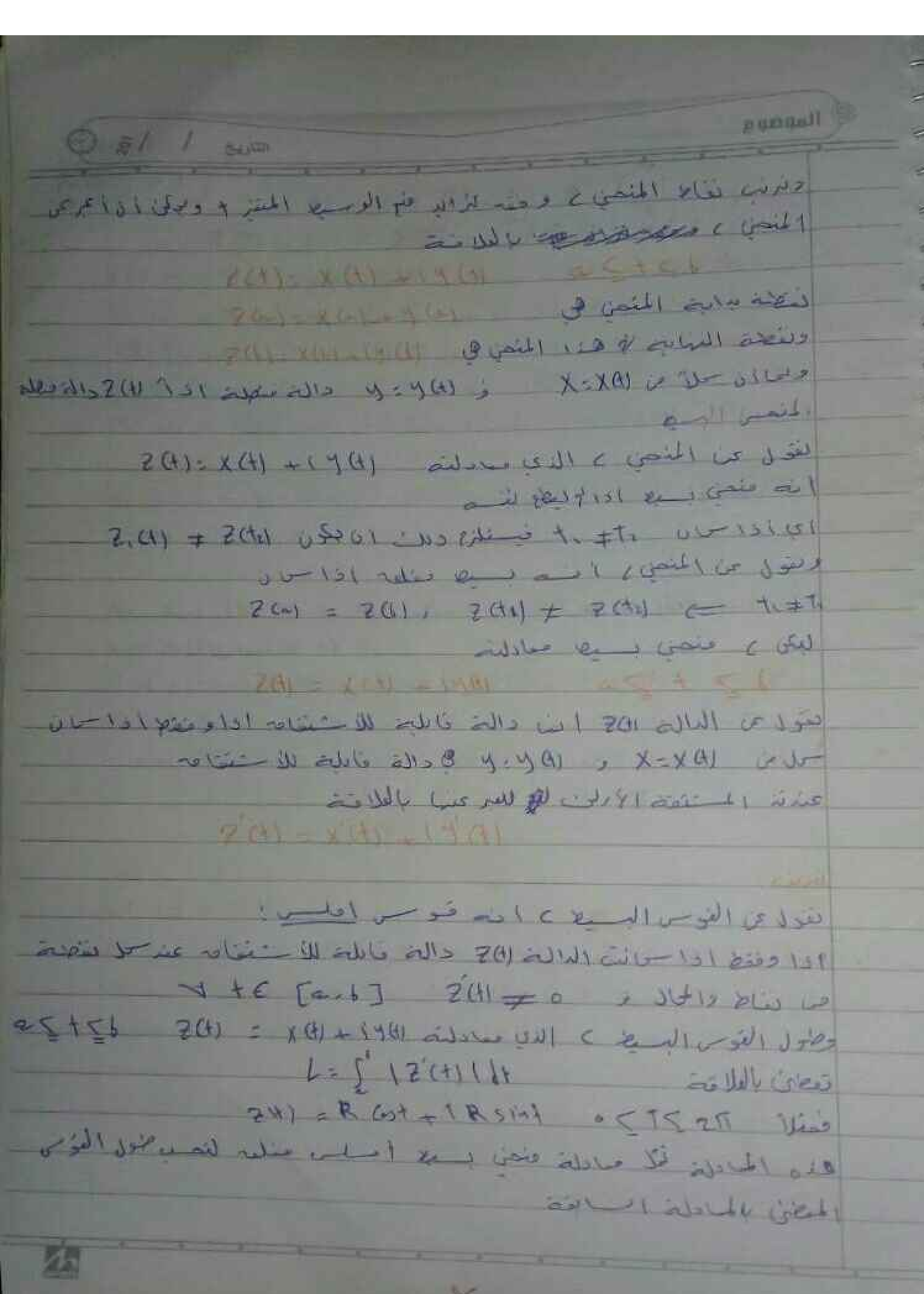
$|\int_a^b f(t)\,dt| \le \int_a^b |f(t)|\,dt \Leftarrow r_0 \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

★ مفاهيم عامة :

المنحني : نقول عن مجموعة النقاط (x, y) من المستوي العقدي بانها تمثل المنحني

اذا وفقط اذا كانت $x = x(t)$ ، $y = y(t)$

كل منهما دالة متصلة بالمتغير t مع المجال $[a, b]$



وترتب نقاط المنحني C وفقاً لتزايد قيم الوسيط المتغير t ويمكن أن نعبر عن المنحني C بالعلاقة

$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$

لنقطة بداية المنحني هي $z(a) = x(a) + iy(a)$

والنقطة النهائية لهذا المنحني هي $z(b) = x(b) + iy(b)$

وإذا كان كل من $x = x(t)$ و $y = y(t)$ دالة متصلة فإن $z(t)$ دالة متصلة للمنحني البسيط.

نقول عن المنحني C الذي معادلته $z(t) = x(t) + iy(t)$ أنه منحني بسيط إذا لم يقطع نفسه

أي إذا كان $t_1 \ne t_2$ فيستلزم ذلك أن يكون $z(t_1) \ne z(t_2)$

ونقول عن المنحني C أنه بسيط مغلق إذا كان

$t_1 \ne t_2 \Rightarrow z(t_1) \ne z(t_2) \ , \ z(a) = z(b)$

ليكن C منحني بسيط معادلته

$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$

نقول عن الدالة $z(t)$ أنها دالة قابلة للاشتقاق أو ملساء إذا كان كل من $x = x(t)$ و $y = y(t)$ دالة قابلة للاشتقاق عندئذ المشتقة الأولى لها نعبر عنها بالعلاقة

$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$

نقول عن القوس البسيط C أنه قوس أملس:
إذا وفقط إذا كانت الدالة $z(t)$ دالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المجال و $z'(t) \ne 0 \quad \forall t \in [a,b]$

وطول القوس البسيط C الذي معادلته $z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \le t \le b$ تعطى بالعلاقة

$L = \int_a^b |z'(t)|\,dt$

فمثلاً $z(t) = R\cos t + iR\sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

هذه المعادلة تمثل معادلة منحني بسيط أملس مغلق لنحسب طول القوس المعطى بالمعادلة السابقة

الموضوع

التاريخ / / 201

$\sqrt{R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)} = \sqrt{R^2} = R$

$$L = \int_0^{2\pi} |-R\sin t + iR\cos t|\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} R\, dt = R\, t\Big|_0^{2\pi} = R\,(2\pi - 0) = 2\pi R$$

إذا سار الجسم على منحنى بسيط أملس مغلق فإن هذا القوس يجعل الأجزاء شمال المستوى العقدي إلى قطاعين الأول يدعى القطاع الداخلي وهي مجموعة النقاط التي تقع على يسار متحرك بدءاً بالرسم هذا المنحنى بالاتجاه الموجب للدوران الثاني القطاع الخارجي وهو عبارة عن مجموعة نقاط التي تقع على يمين المتحرك عندما يرسم بالاتجاه الموجب للدوران

[illegible]

هو عبارة عن عدد منتهٍ من الأقواس البسيطة الملساء المتصلة مع بعضها البعض نهاية ببداية

[illegible]

هو عدد أقواس بسيطة ملساء متصلة مع بعضها البعض نهاية ببداية وبداية الأول لنهاية الأخير

تكامل المنحنى أو الكفاف يسمى معادلة [illegible]

قوس أو ... نهاية القوس وبداية بداية القوس

ونحصل على معادلة من معادلة الكفاف عكس بأن نعوض عن $t = -t$

[illegible] z

[illegible]

لتكن $f(z)$ دالة متغير عقدي

إن قيمة تكامل هذه الدالة على كفاف يمتد من z_1 إلى z_2 لنقطة ثم ... من ... ومن ... لنقطة من طريق الذي يصل من z_1 إلى z_2 ... التكامل ... الشكل الآتي

[illegible]

لتعريف هذا التكامل سوف نستخدم العلاقة (1)

نفرض ان معادلة المنحنى الذي يصل من z_1 الى z_2 في

$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$

يعرف تكامل التكامل بالعلاقة الآتية

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

بما ان

$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$

$z'(t) = x' + iy'$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b (ux' - vy') + i(vx' + uy')\,dt$$

وللاستفادة من ذلك فان

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b ux' - vy'\,dt + i\int_a^b vx' + uy'\,dt$$

★ $\int_c f(z)\,dz = \int_c u\,dx - v\,dy + i\int_c v\,dx + u\,dy$ علاقة نستخدمها

خواص

(1) يمكن الاثبات بأن $\int_c f(z)\,dz = -\int_{-c} f(z)\,dz$

$$\int_c [f(z) + g(z)]\,dz = \int_c f(z)\,dz + \int_c g(z)\,dz$$

اذا كان C منحنى مكون من c_1 و c_2 بحيث ان نهاية c_1 هي بداية c_2 فان

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz$$

$(x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3$

الموضوع — التاريخ / / ٢٠

إذا وجد عدد ثابت M بحيث أن $|f(z)| \le M$

فحسب: $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M \int_a^b |z'(t)|\,dt$

L

أي أن $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$

أي أن مقياس قيمة تكامل الدالة على منحنى يساوي طول ... لا يتجاوز المقدار ML أطول المنحنى M

مثال

أحسب قيمة التكامل $\int_C z^2\,dz$

1) C قطعة مستقيمة من $z=0$ إلى $z=2+i$

2) C تتكون من قطعتين مستقيمتين C_1 من $z=0$ إلى $z=2$، C_2 من $z=2$ إلى $z=2+i$

3) C تتكون من قطعة مستقيمة C_1 من $z=0$ إلى $z=2$

الحل لحساب قيمة التكامل نستخدم العلاقة

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{1-0}{2-0}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

(2,1)

$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$

نفرض أن

$z(t) = 2t + it \qquad 0 \le t \le 1,\ y = t \Leftarrow x = 2t$

$z'(t) = 2 + i$

الموضوع التاريخ / /

وفي المعادلة $\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

ط / خامس (ثاني)

$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$

$z(t) = t(2+i)$

سؤال ثاني

$f(z) = z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

لدينا

$f(z(t)) = 2t^3 - 2t^3 + i(\ldots)$

$f(z(t)) = z t^3 + i\,11 t^3$

$\int z^3\,dz = \int_0^1 (2t^3 + \ldots)(2+i)\,dt$

$= (2+i)(2+11i)\int_0^1 t^3\,dt$

$= (2+i)(2+11i)\,\frac{1}{4}$

طلب ثاني:

احسب الاحداثيات التي تحقق معادلة المنحنى؟

$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$

$z(t) = 0 + t(2-0)$

$z(t) = 2t$

$f(z(t)) = 8t^3$

$\int z^3\,dz = \int 8t^3 \cdot 2\,dt = 16\int t^3\,dt$

احسب حساب قيمة التكامل $\int z^3\,dz$

$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad 0 \le t \le 1$

$z(t) = z + t(z - 1 - z)$

$z(t) = z - it \qquad 0 \le t \le 1$

$z'(t) = -i$

$f(z(t)) = (z - it)^2$

$$\int_{c_2} z^2 \, dz = \int_0^1 (z - it)^2 (-i) \, dt$$

$$= -i \int_0^1 (4 - 4it - t^2) \, dt$$

$$= -i \left[4t - 2it^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$= -i \left(4 - 2i - \frac{1}{3} \right) = -\frac{11}{3} i - 2$$

$$\Rightarrow \int_{c_2} z^2 \, dz = \dots \qquad \boxed{\frac{-1 + 11i}{3}}$$

العلاقة التالية

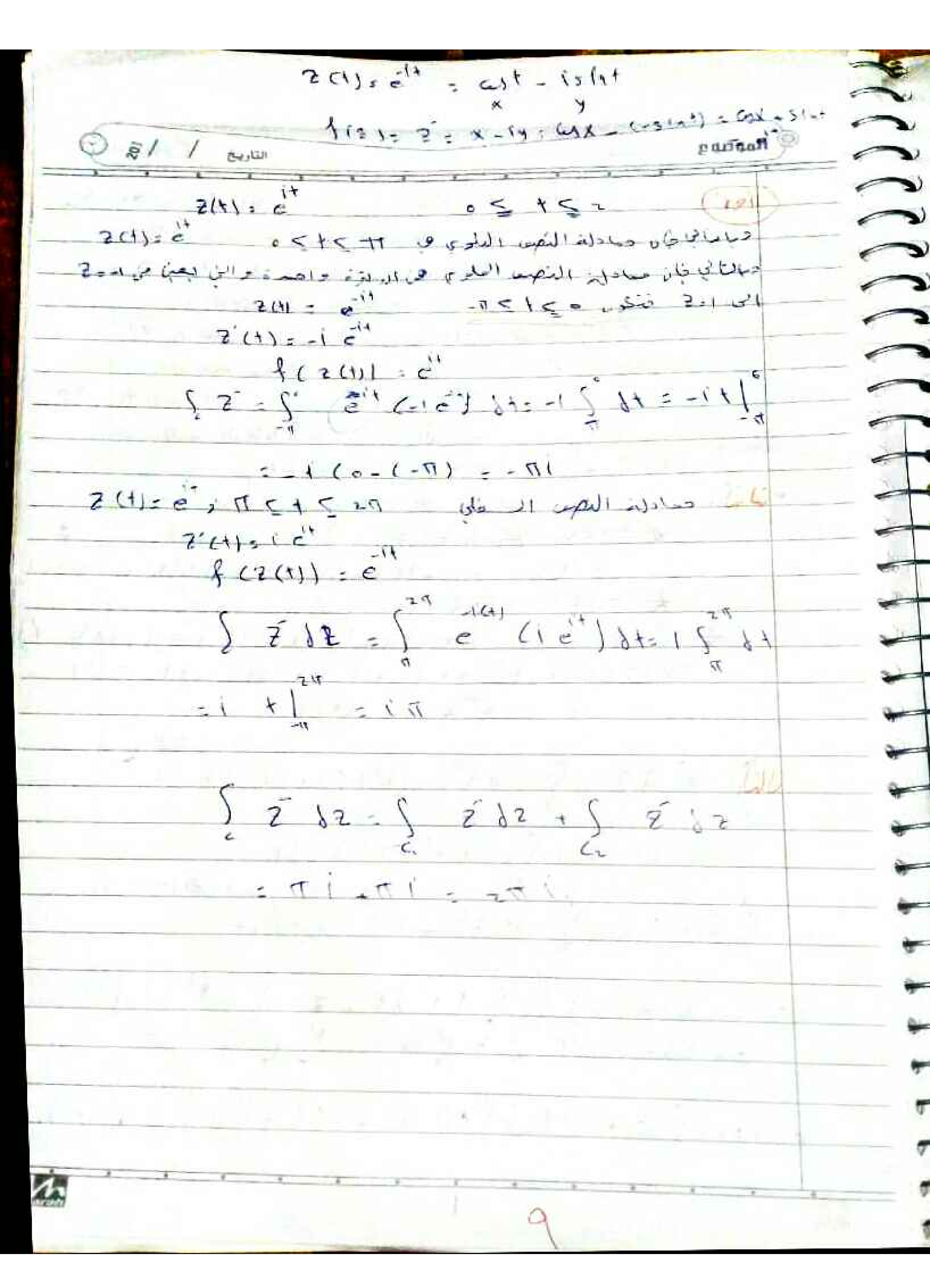
$$\int_c z^3 \, dz = \int_{c_1} z^3 \, dz + \int_{c_2} z^3 \, dz = \dots$$

مثال

أحسب قيمة التكامل $\int_c \bar{z} \, dz$

أولاً: c النصف العلوي من الدائرة $|z| = 1$ والتي تبدأ $z = 1$ ونهايته $z = -1$

ثانياً: c النصف السفلي من الدائرة $|z| = 1$ والتي تبدأ $z = 1$ ونهايته $z = -1$



$z(t) = e^{-it} = \cos t - i \sin t$

$x \quad y$

$f(z) = \bar{z} = x - iy = \cos x - (-\sin t) = \cos t + \sin t$

المحتويات — التاريخ / / 20

$z(t) = e^{it} \qquad 0 \le t \le 2$

$z(t) = e^{it}$ وبما أن معادلة النصف العلوي في $-\pi \le t \le 0$

وبالتالي فإن معادلة النصف العلوي في الدائرة باتجاه عقارب الساعة من $z=1$ الى $z=-1$ تكون $0 \le t \le \pi$

$z(t) = e^{-it}$

$z'(t) = -i e^{-it}$

$f(z(t)) = e^{it}$

$\int \bar{z} = \int_{-\pi}^{0} e^{it}(-i e^{-it})\, dt = -i \int_{\pi}^{0} dt = -it \Big|_{-\pi}^{0}$

$= -i(0 - (-\pi)) = -\pi i$

$z(t) = e^{it}, \ \pi \le t \le 2\pi$ معادلة النصف السفلي

$z'(t) = i e^{it}$

$f(z(t)) = e^{-it}$

$\int \bar{z}\, dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i(t)} (i e^{it})\, dt = i \int_{\pi}^{2\pi} dt$

$= i\, t \Big|_{\pi}^{2\pi} = i\pi$

$\int_{c} \bar{z}\, dz = \int_{c_1} \bar{z}\, dz + \int_{c_2} \bar{z}\, dz$

$= \pi i + \pi i = 2\pi i$